Geometria analityczna

→ Długość odcinka

Długość odcinka o końcach w punktach $A(x_A; y_A)$ oraz $B(x_B; y_B)$ określona jest wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

→ Środek odcinka

Współrzędne środka odcinka AB:

$$S_{AB} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

· co jeśli mamy $S(5;3)$ i $B(3;-8)$, a mamy obliczyć $A(x_A;y_A)$?

$$S_{AB} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

$x_B = 3$ $\quad y_B = -8$

$x_S = 5$ $\quad y_S = 3$

$5 = \frac{x_A + 3}{2} \quad |\cdot 2$

$10 = x_A + 3 \quad |-3$

$x_A = 7$

$3 = \frac{y_A - 8}{2} \quad |\cdot 2$

$6 = y_A - 8 \quad |+8$

$y_A = 14$

$A(7;14)$

→ Równanie kierunkowe prostej

- Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt A(3;4) oraz B (6;8) .

① $y = ax + b$

② $a = \frac{4-8}{3-6} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$

③ $y = \frac{4}{3}x + b \Rightarrow 4 = \frac{4}{3} \cdot 3 + b$

$4 = 4 + b \quad |-4$

$b = 0$

$y = \frac{4}{3}x + 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$ ← równanie prostej

PLAN DZIAŁANIA

1. Zapisuję postać kierunkową prostej: y=ax+b
2. Zapisuje wzór na współczynnik kierunkowy prostej i go obliczam:
   $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$

3. Podstawiam do wzoru y = ax + b współczynnik kierunkowy a oraz współrzędne dowolnego punktu, który należy do prostej.

→ Równanie ogólne prostej

Postać ogólna:

$$Ax + By + C = 0$$

• $y = 4x - 3$

$0 = 4x - y - 3$

$A = 4 \quad B = -1 \quad C = -3$

• $y = \frac{4}{3}x$

$0 = \frac{4}{3}x - y$

$A = \frac{4}{3} \quad B = -1 \quad C = 0$

• $-3x + 2y - 1 = 0$

$2y = 3x + 1$

$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

• $2x - \frac{3}{4}y + 8 = 0$

$\frac{3}{4}y = 2x + 8$

$y = 2 \cdot \frac{4}{3}x + 8 \cdot \frac{4}{3}$

$y = \frac{8}{3}x + \frac{32}{3}$

SAMPLE

→ Proste równoległe

Dwie proste są równoległe, jeśli spełniony jest warunek: $\boxed{a_1 = a_2}$

a_1, a_2 - współczynniki kierunkowe prostych

- Wyznacz m, dla którego prosta y= (2m+3)x-2 oraz y= (12-m)x +9 są równoległe.

$y=(2m+3)x-2$ $\qquad$ $y=(12-m)x+9$

$a_1 = 2m+3 \quad b_1 = -2$ $\qquad$ $a_2 = 12-m \quad b_2 = 9$

$a_1 = a_2$ ← wtedy proste są równoległe

$2m+3 = 12-m$

$3m = 9$

$m = 3$ $\qquad$ dla $m=3$ proste są równoległe

→ Proste prostopadłe

Dwie proste są prostopadłe, jeśli spełniony jest warunek: $\boxed{a_1 \cdot a_2 = -1}$

a_1, a_2 - współczynniki kierunkowe prostych

- Wyznacz m, dla którego prosta y= (2m+3)x-2 oraz y= (12-m)x +9 są prostopadłe.

$a_1 = 2m+3$ $\qquad$ $a_1 \cdot a_2 = -1$ ← wtedy proste są prostopadłe

$a_2 = 12-m$ $\qquad$ $(2m+3)(12-m) = -1$

$24m - 2m^2 + 36 - 3m = -1$

$-2m^2 + 21m + 37 = 0$ $\qquad$ $\sqrt{\Delta} = \sqrt{441 + 296} = \sqrt{737}$

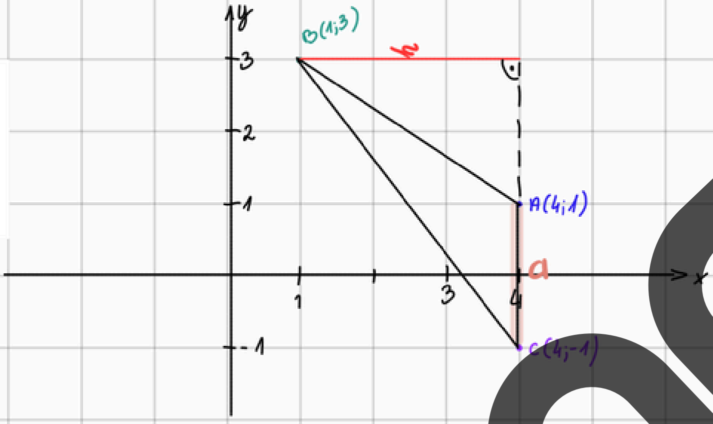
$2m^2 - 21m - 37 = 0$

$m_1 = \frac{21 + \sqrt{737}}{4}$ $\qquad$ $m_2 = \frac{21 - \sqrt{737}}{4}$

Dla $m = \frac{21-\sqrt{737}}{4}$ lub $m = \frac{21+\sqrt{737}}{4}$ proste są prostopadłe.

3. Dane są punkty $A = (4, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (4, -1)$. Pole trójkąta ABC jest równe

A. 3
B. 6
C. 8
D. 16



$P_\Delta = \frac{1}{2} a h$ $\quad a = 1-(-1) = 2$

$h = 4-1 = 3$

$P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 3$

4. Prosta o równaniu $y = ax + b$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = -4x + 1$ i przechodzi przez punkt $P = (\frac{1}{2}, 0)$, gdy

A. $a = -4$ i $b = -2$
B. $a = \frac{1}{4}$ i $b = -\frac{1}{8}$
C. $a = -4$ i $b = 2$
D. $a = \frac{1}{4}$ i $b = \frac{1}{2}$

$y = ax + b$ $\quad P(\frac{1}{2}; 0)$

$y = -4x + 1$

$a \cdot (-4) = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

$y = \frac{1}{4}x + b \quad 0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + b \Rightarrow b = -\frac{1}{8}$

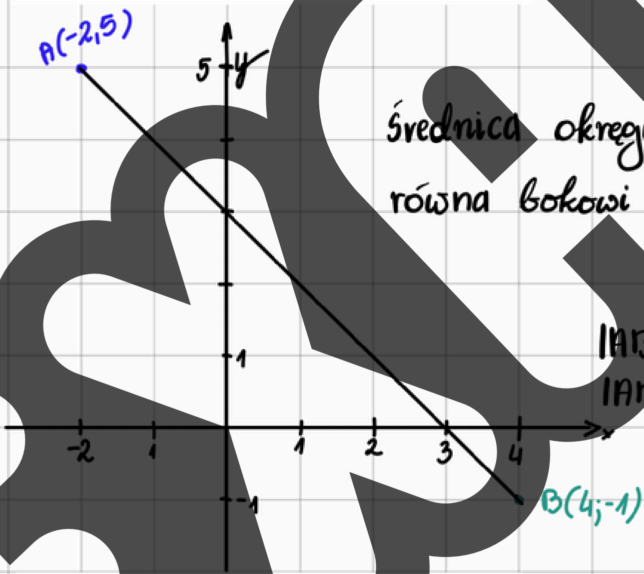
$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$

5. Dane są punkty o współrzędnych $A = (-2, 5)$ oraz $B = (4, -1)$. Średnica okręgu wpisanego w kwadrat o boku AB jest równa

A. 12
B. 6
C. $6\sqrt{2}$
D. $2\sqrt{6}$

$A(-2,5)$

$B(4,-1)$



Średnica okręgu wpisanego w kwadrat o boku |AB| będzie równa bokowi tego kwadratu.

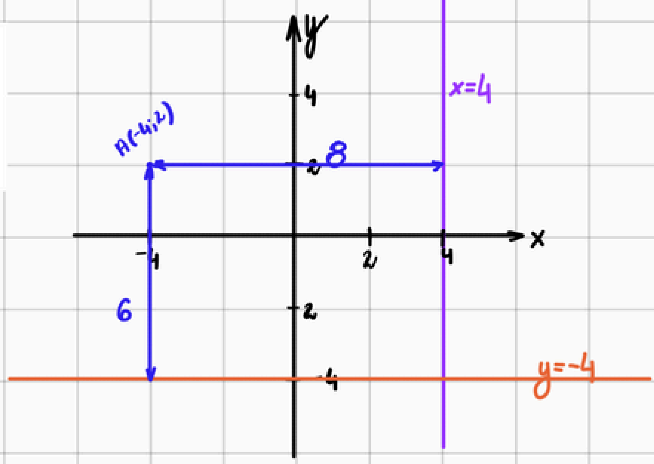
$|AB| = \sqrt{(4+2)^2 + (-1-5)^2}$

$|AB| = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$

6. Suma odległości punktu $A = (-4, 2)$ od prostych o równaniach $x = 4$, $y = -4$ jest równa

A. 14
B. 12
C. 10
D. 8

$6 + 8 = 14$



11. W układzie współrzędnych punkty $A = (4, 3)$ i $B = (10, 5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y = 2x + 3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.

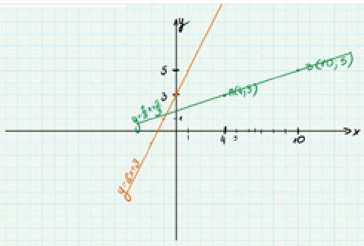
$A(4;3)$
$B(10;5)$
$y = 2x + 3$

① Punkt C leży na prostej $y = 2x+3$, więc ma współrzędne
$C(x;\ 2x+3)$

② wyznaczam równanie prostej AB
$y = ax + b$
$a_1 = \frac{5-3}{10-4} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
$5 = \frac{1}{3}\cdot 10 + b_1$
$5 - \frac{10}{3} = b_1 \Rightarrow b_1 = \frac{5}{3}$
$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

③ wyznaczam współrzędne punktu C wiedząc, że $|AB| \perp |BC|$, czyli $a_1 a_2 = -1$
$\frac{1}{3}a_2 = -1 \Rightarrow \boxed{a_2 = -3}$
$a_2 = \frac{5-2x-3}{10-x} \Rightarrow -3 = \frac{2-2x}{10-x}$
$-30 + 3x = 2 - 2x$
$5x = 32$
$x = 6{,}4$ $\quad y = 2\cdot 6{,}4 + 3 = 15{,}8$

$\begin{cases} x = 6{,}4 \\ y = 15{,}8 \end{cases}$ $\quad \boxed{C(6{,}4;\ 15{,}8)}$



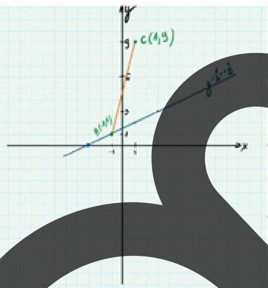
12. Punkt $A = (-1, 1)$ i $C = (1, 9)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Podstawa AB tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta.

$A(-1;1)$
$C(1;9)$
$|AC| = |BC|$
$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

① Wyznaczam długość odcinka $|AC|$
$|AC| = \sqrt{(1+1)^2 + (9-1)^2}$
$|AC| = \sqrt{4+64}$
$|AC| = \sqrt{68}$

$|AC| = \boxed{|BC| = \sqrt{68}}$

② $B(x;\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2})$ – współrzędne punktu
$|BC| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-9)^2}$
$|BC| = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + (\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} - 9)^2}$
$|BC| = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + (\frac{1}{2}x - \frac{15}{2})^2}$
$|BC| = \sqrt{x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{225}{4}}$
$|BC| = \sqrt{\frac{5}{4}x^2 - \frac{19}{2}x + \frac{229}{4}}$
$\sqrt{68} = \sqrt{\frac{5}{4}x^2 - \frac{19}{2}x + \frac{229}{4}} \quad |^2$
$68 = \frac{5}{4}x^2 - \frac{19}{2}x + \frac{229}{4} \quad |\cdot 4$
$272 = 5x^2 - 38x + 229$
$0 = 5x^2 - 38x - 43$ $\quad \Delta = 1444 + 860 = 2304$
$\sqrt{\Delta} = 48$
$x_1 = \frac{38-48}{10} = -1$ ← współrzędne punktu A
$x_2 = \frac{38+48}{10} = \frac{43}{5} = 8{,}6$ $\quad \begin{cases} x_2 = 8{,}6 \\ y_2 = 5{,}8 \end{cases}$
$y_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{43}{5} + \frac{3}{2} = \frac{29}{5} = 5{,}8$ $\quad \boxed{B(8{,}6;\ 5{,}8)}$



13. Dane są punkty $A = (-4, 0)$ i $M = (2, 9)$ oraz prosta k o równaniu $y = -2x + 10$. Współrzędne B trójkąta ABC to punkt przecięcia prostej k z osią Ox układu współrzędnych, a wierzchołek C jest punktem przecięcia prostej k z prostą AM. Oblicz pole trójkąta ABC.

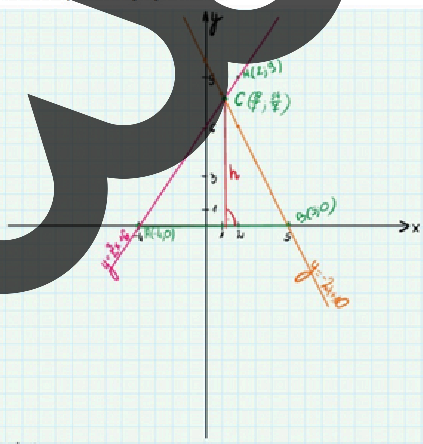
$A(-4;0)$
$M(2;9)$
$k: y = -2x + 10$

① wyznaczam punkt B
$0 = -2x + 10$ $\quad B(5;0)$
$2x = 10$
$x = 5$

② wyznaczam prostą AM
$a_{AM} = \frac{9-0}{2+4} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
$y = ax + b$
$0 = \frac{3}{2}\cdot(-4) + b$
$6 = b$ $\quad y = \frac{3}{2}x + 6$

③ wyznaczam punkt C
$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + 6 \\ y = -2x + 10 \end{cases}$ $\quad \frac{3}{2}x + 6 = -2x + 10 \;|\cdot 2$
$3x + 12 = -4x + 20$
$7x = 8$
$x = \frac{8}{7}$
$y = -2\cdot\frac{8}{7} + 10 = \frac{54}{7}$ $\quad \begin{cases} x = \frac{8}{7} \\ y = \frac{54}{7} \end{cases}$ $\quad C(\frac{8}{7};\frac{54}{7})$

④ Obliczam pole $P_\Delta = \frac{1}{2}ah$
$h = \frac{54}{7}$
$a = 4 + 5 = 9$
$P_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 9 \cdot \frac{54}{7} = \frac{243}{7}$ $\quad \boxed{P_\Delta = 34\frac{5}{7}}$



14. W układzie współrzędnych dane są punkty $A = (-43, -12)$, $B = (50, 19)$. Prosta AB przecina oś Ox w punkcie P. Oblicz pierwszą współrzędną punktu P.

$A(-43;-12)$
$B(50;19)$ $\quad y = ax + b$

① $a = \frac{19+12}{50+43} = \frac{31}{93} = \frac{1}{3}$
$y = \frac{1}{3}x + b$
② $19 = \frac{1}{3}\cdot 50 + b \Rightarrow b = \frac{7}{3}$
③ $0 = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$
$-\frac{7}{3} = \frac{1}{3}x \quad |\cdot 3$
$\boxed{x = -7}$

Równanie okręgu - podstawa i rozszerzenie

→ Równanie okręgu

- postać kanoniczna

środek okręgu $S(a, b)$

$r > 0$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

- postać ogólna

środek okręgu $S(x_s, y_s)$

$$(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_s x - 2y_s x + x_s^2 + y_s^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$a = -2x_s \qquad b = -2y_s \qquad c = x_s^2 + y_s^2 - r^2$

$x_s = -\frac{a}{2} \qquad y_s = -\frac{b}{2} \qquad r = \frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$

$a^2 + b^2 - 4c > 0$

– Dane jest równanie okręgu $x^2+y^2-2x+2y+1=0$.
Wyznacz współrzędne środka okręgu i długość promienia. Zapisz równanie w postaci kanonicznej.

I sposób

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

$a=-2 \quad y=2 \quad c=1$

$x_s = -\frac{-2}{2} \qquad y_s = -\frac{2}{2}$

$x_s = 1 \qquad y_s = -1 \qquad \Rightarrow S(1;-1)$

$r = \frac{\sqrt{(-2)^2+2^2-4\cdot 1}}{2} = \frac{\sqrt{4+4-4}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$$(x-1)^2+(y+1)^2=1$$

II sposób

$x^2+y^2-2x+2y+1=0$

$x^2-2x+y^2+2y+1=0$

$x^2-2x+1+y^2+2y+1-1=0$

$(x-1)^2+(y+1)^2-1=0$

$(x-1)^2+(y+1)^2=1$

$S(1;-1) \qquad r=1$

EXAMPLE

6. Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A = (-5, 3)$ i $B = (0, 6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x - 3y + 1 = 0$.

$(x-a)^2+(x-b)^2=r^2$

PLAN DZIAŁANIA

1. Wyznaczamy równanie prostej AB.
2. Wyznaczamy równanie symetralnej odcinka AB.
3. Tworzymy układ równań symetralna ab oraz prosta x - 3 y + 1 = 0. Miejsce przecięcia się tych prostych będzie środkiem okręgu.
4. Szukamy odległości środka okręgu od punktu A lub od punktu B, to da długość promienia.
5. Zapisujemy równanie okręgów w postaci kanonicznej.

① $a=\frac{6-3}{0+5}=\frac{3}{5}$

$6=\frac{3}{5}\cdot 0+b \quad b=6$

$AB: \ y=\frac{3}{5}x+6$

② $S_{AB}=\left(\frac{-5+0}{2}; \frac{3+6}{2}\right)$

$S_{AB}=\left(-\frac{5}{2}; \frac{9}{2}\right)$

$a_1\cdot a_2=-1 \Rightarrow \frac{3}{5}\cdot a_2=-1 \Rightarrow a_2=-\frac{5}{3}$

$\frac{9}{2}=-\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)+b \Rightarrow b=\frac{1}{3}$

symetralna odcinka AB: $y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$

③ $x-3y+1=0 \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} \\ y=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3} \end{cases}$$

$\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}=-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}x=-\frac{5}{3}x$

$\frac{6}{3}x=0 \Rightarrow x=0$

$y=-\frac{5}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow S\left(0; \frac{1}{3}\right)$$

④ $S\left(0;\frac{1}{3}\right) \quad A(-5;3)$

$|AS|=\sqrt{(0+5)^2+\left(\frac{1}{3}-3\right)^2}$

$|AS|=\sqrt{25+\frac{64}{9}}=\sqrt{\frac{225+64}{9}}=\sqrt{\frac{289}{9}}$

$|AS|=\frac{17}{3} \qquad |AS|=r=\frac{17}{3}$

⑤ $(x-0)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{17}{3}\right)^2$

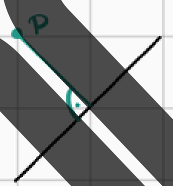
$x^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{289}{9}$

Odległość punktu od prostej

Odległość d punktu $P(x_0;y_0)$ od prostej o równaniu ogólnym $Ax+By+C=0$ jest równa:

$$\boxed{d=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

Odległość punktu od prostej to tak naprawdę długość odcinka prostopadłego do danej prostej, zakończonego w danym punkcie.



1. Prosta o równaniu $y=\frac{3}{4}x-\frac{61}{14}$ jest styczna od okręgu o środku $S=(1,-4)$. Wyznacz promień tego okręgu.

$y=\frac{3}{4}x-\frac{61}{14} \Rightarrow 0=\frac{3}{4}x-y-\frac{61}{14}$

$S(1;-4)$

$$d=\frac{\left|\frac{3}{4}\cdot 1-1\cdot(-4)-\frac{61}{14}\right|}{\sqrt{\frac{9}{16}+1}}=\frac{\left|\frac{3}{4}+4-\frac{61}{14}\right|}{\sqrt{\frac{25}{16}}}=\frac{\frac{11}{28}}{\frac{5}{4}}=\frac{11}{28}\cdot\frac{4}{5}=\frac{11}{35}$$

$r=\frac{11}{35}$ ← promień okręgu o środku w punkcie S

2. Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y), dane są okrąg O o środku w punkcie $S=(3,-4)$ i prosta k o równaniu $2x-y-11=0$. Okrąg O jest styczny do prostej k w punkcie P. Wyznacz i zapisz równanie okręgu O.

$S(3;-4)$

$k:\ 2x-y-11=0$

$$d=\frac{|2\cdot 3-1\cdot(-4)-11|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|6+4-11|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

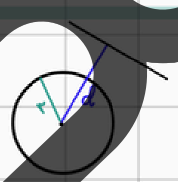
promień okręgu

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

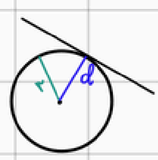
$(x-3)^2+(y+4)^2=\frac{1}{5}$ ← równanie okręgu

Punkty wspólne prostej i okręgu, prostej i paraboli

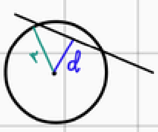
→ Liczba punktów wspólnych prostej i okręgu



- Brak punktów wspólnych
- Odległość środka okręgu od prostej jest większa niż długość promienia
- $d > r$



- 1 punkt wspólny
- Odległość środka okręgu od prostej jest równa promieniowi
- $d = r$



- 2 punkty wspólne
- Odległość środka okręgu od prostej jest mniejsza niż promień
- $d < r$

SAMPLE

2. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których prosta o równaniu $y = mx + (2m + 3)$ ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie $S = (0, 0)$ i promieniu $r = 3$.

(rozszerzenie)

$y = mx + (2m+3)$

$S(0,0),\ r=3 \Rightarrow x^2+y^2=9$

$d<3 \leftarrow$ aby prosta przecinała okrąg w dwóch miejscach

$mx - y + 2m + 3 = 0$

$$d = \frac{|m\cdot 0 - 1\cdot 0 + 2m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}}$$

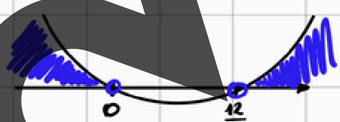
$$\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}} < 3 \qquad \sqrt{m^2+1} > 0$$

$$|2m+3| < 3\sqrt{m^2+1}$$

$$(2m+3)^2 < 9\cdot(m^2+1)$$
$$4m^2+12m+9 < 9m^2+9$$
$$-5m^2+12m < 0$$
$$-m(5m-12) < 0$$
$$m(5m-12) > 0$$

$m=0 \qquad 5m-12=0$

$\qquad\qquad m=\frac{12}{5}$



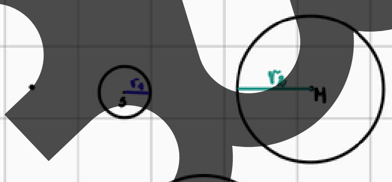
$m\in(-\infty;0)\cup(\frac{12}{5};0)$

Punkty wspólne dwóch okręgów

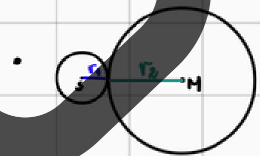
rozszerzenie

EXAMPLE

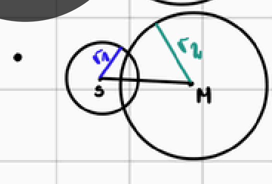
→ Dane są dwa okręgi o_1 o środku w punkcie S i promieniu r_1 oraz okrąg o_2 o środku w punkcie M i o promieniu r_2.

- 

Okręgi takie są rozłączne zewnętrznie wtedy, gdy $|SM| > r_1 + r_2$

- 

Okręgi takie są styczne zewnętrznie wtedy, gdy $|SM| = r_1 + r_2$

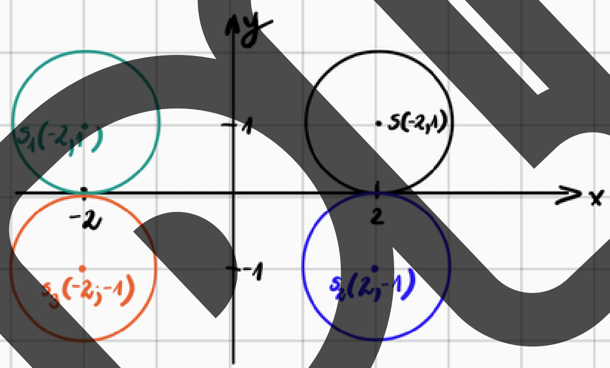
- 

Okręgi takie przecinają się wtedy, gdy $|r_1 - r_2| < |SM| < r_2 + r_2$

Symetria osiowa i środkowa

→ Jak wyznaczyć obraz okręgu w symetrii osiowej?

- By wyznaczyć obraz okręgu względem osi OY
  ⇒ odbijamy symetrycznie środek okręgu względem osi OY.
- By wyznaczyć obraz okręgu względem osi OX ⇒ odbijamy symetrycznie środek względem osi OX.
- By wyznaczyć obraz okręgu względem początku układu współrzędnych
  ⇒ odbijamy symetrycznie środek okręgu względem punktu (0;0)



→ Obraz wielokąta

By wyznaczyć obraz dowolnego wielokąta:
- W symetrii względem osi x współrzędną y każdego punktu zmieniamy na przeciwną.
- Symetrii względem osi y, współrzędną x każdego punktu zmieniamy na przeciwną.
- W symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych, współrzędną x i y każdego punktu zmieniamy na przeciwną.

1. Dany jest trójkąt ABC. Wiadomo, że A jest środkiem okręgu o równaniu $x^2+y^2-6x-4y+9=0$, B jest środkiem okręgu o równaniu $(x-2)^2+(y+2)^2=9$ oraz $C=(6,2)$. Wyznacz współrzędne wierzchołków A', B', C' obrazu tego trójkąta względem początku układu współrzędnych. Następnie wyznacz równanie prostej zawierającej środkową $A'D'$ nowopowstałego trójkąta.

① $x^2+y^2-6x-4y+9=0$

$x^2-6x+y^2-4y+9=0$

$(x-3)^2-9+(y-2)^2-4+9=0$

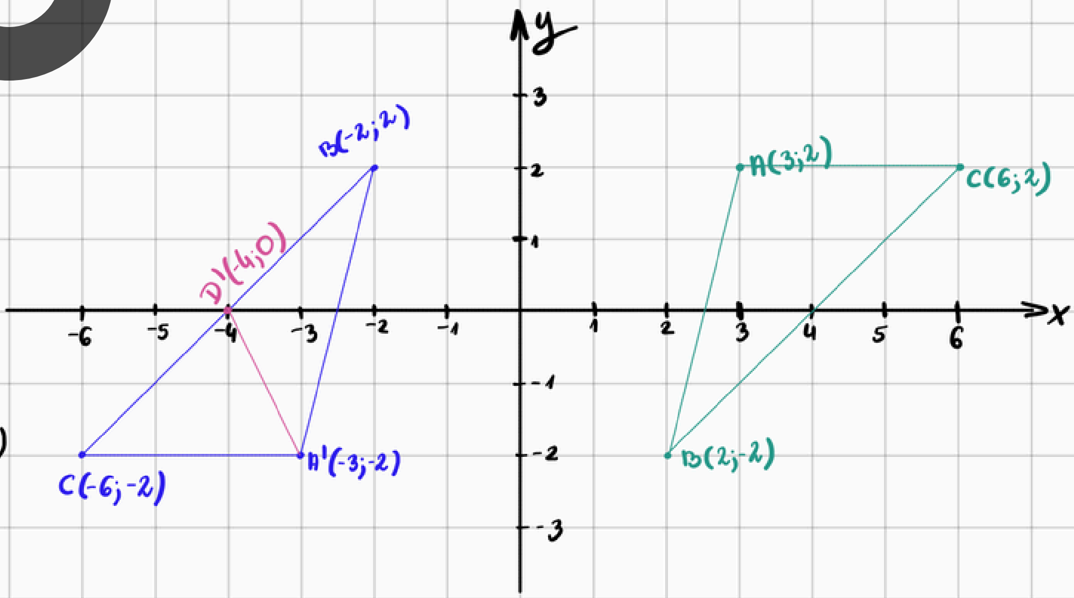
$(x-3)^2+(y-2)^2=4$ $A(3;2)$

② $(x-2)^2+(y+2)^2=4$ $B(2;-2)$

③ $A(3;2) \xrightarrow{S(0,0)} A'(-3;-2)$

$B(2;-2) \xrightarrow{S(0,0)} B'(-2;2)$

$C(6;2) \xrightarrow{S(0,0)} C'(-6;-2)$



⑤ D' jest środkiem boku C'B' więc:

$$D' = \left(\frac{-6-2}{2}; \frac{-2+2}{2}\right) \qquad D=(-4;0)$$

$y=ax+b \qquad a=\frac{0+2}{-4+3}=\frac{2}{-1}=-2$

$y=-2x+b$

$0=-2\cdot(-4)+b \Rightarrow b=-8$

$y=-2x-8$ ← równanie środkowej A'D'.

Wektory - rozszerzenie

→ **Wektorem** nazwiemy uporządkowaną parę liczb:

$$\vec{AB}=[x_B-x_A; y_B-y_A]$$

Dane są punkty: $A(x_A;y_A)$ i $B(x_B;y_B)$.

- Oblicz współrzędne wektora $\vec{AB}$ jeśli $A(3;3)$, a $B(6;4)$.

$\vec{AB}=[6-3;4-3] \Rightarrow \vec{AB}=[3;1]$

- Wiedząc, że wektor $\vec{AB}=[3;8]$ i $A(11;-2)$, wyznacz współrzędne punktu B.

$\vec{AB}=[x_B-x_A; y_B-y_A] \qquad [3;8]=[x_B-11; y_B+2]$

$3=x_B-11 \qquad 8=y_B+2$

$x_B=14 \qquad 6=y_B \qquad B(14;6)$

→ **Długość wektora**

Dane są punkty: $A(x_A;y_A)$ i $B(x_B;y_B)$.

$$\boxed{|\vec{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}$$

Dany jest wektor $\vec{u}=[p;q]$

$$\boxed{|\vec{u}|=\sqrt{p^2+q^2}}$$

SAMPLE