Kombinatoryka

Kombinatoryka - zajmuje się ustaleniem liczebności zbiorów skończonych.

Reguła mnożenia - jeśli doświadczenie losowe możemy podzielić na dwa etapy i pierwszy etap możemy wykonać na a sposobów, zaś drugi na b sposobów, to całą czynność możemy wykonać na $a \cdot b$ sposobów.

Reguła dodawania - jeśli zbiór wszystkich wyników podzielimy na dwa rozłączne (niemające wspólnych elementów) podzbiory i w pierwszym podzbiorze jest a wyników i w drugim podzbiorze jest b wyników, to wszystkich wyników jest $a+b$.

Ważne:

Cyfry: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Ile jest par liczb dwucyfrowych?

- liczby dwucyfrowe: $9 \cdot 10 = 90$
- PARY licz dwucyfrowych: $90 \cdot 90 = 8100$

Cyfry parzyste:
$\{0,2,4,6,8\}$

Cyfry nieparzyste:
$\{1,3,5,7,9\}$

Wzory:

- $(a;b)$ $b-a-1$
- $(a;b\rangle$ $b-a$
- $\langle a;b\rangle$ $b-a+1$

3.Ile jest wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych mniejszych od 2018 i podzielnych przez 5?

A.402
B.403
C.203
D.204

Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego:
$a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$

$a_1 = 1000 \rightarrow$ pierwsza liczba 4-cyfrowa, podzielna przez 5
$r = 5$
$a_n = 2015 \rightarrow$ ostatnia liczba 4-cyfrowa, mniejsza od 2018, podzielna przez 5

$2015 = 1000 + (n-1)\cdot 5 \quad | -1000$
$1015 = (n-1)\cdot 5 \quad | :5$
$203 = n-1 \quad | +1$
$204 = n$

4.Liczba wszystkich dodatnich liczb czterocyfrowych parzystych, w których zapisie nie występują cyfry 0 i 2, jest równa

A. 8×8×8×3
B. 8×7×6×3
C. 8×10×10×4
D. 9×8×7×4

$\{1, 3, \underline{4}, 5, \underline{6}, 7, \underline{8}, 9\} \rightarrow$ z jakich cyfr można skorzystać

$\underline{8}\cdot\underline{8}\cdot\underline{8}\cdot\underline{3}$

5.Ile jest wszystkich czterocyfrowych liczb naturalnych mniejszych niż 2017?

$\langle a; b\rangle \quad b - a + 1$ najmniejsza cyfra 4-cyfrowa $\rightarrow 1000$
$\langle 1000; 2016\rangle$ największa cyfra 4-cyfrowa mniejsza od $2017 \rightarrow 2016$

$2016 - 1000 + 1 = 1017$

Jest 1017 liczb 4-cyfrowych mniejszych od 2017.

Wariacje

z powtórzeniami

n^k

wybieramy w wielu etapach, za każdym razem z tego samego zbioru

→ kolejność ma znaczenie

→ k - liczba etapów wyborów

→ n - liczebność zbioru, z którego będziemy wybierać na każdym etapie

bez powtórzeń

$\frac{n!}{(n-k)!}$ $n \geq k$

Permutacje

wybieramy w wielu etapach, za każdym razem z tego samego zbioru.

→ Kolejność ma znaczenie.

→ Elementy nie mogą się powtarzać.

→ Wykorzystujemy wszystkie elementy.

Permutacje są szczególnym przypadkiem wariacji, z tą różnicą, że w permutacji trzeba wykorzystać wszystkie elementy.

$n!$

(np. Ile licz 4 cyfrowych można utworzyć ze zbioru $\{1,2,3,4\}$?)

Zadania

1.Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 12.

iloczyn → wynik mnożenia

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

① $12=2\cdot 6 \quad \binom{8}{1}\binom{7}{1}\binom{6}{6}=8\cdot 7\cdot 1=56$

② $12=3\cdot 4 \quad \binom{8}{1}\binom{7}{1}\binom{6}{6}=56$

③ $=2\cdot 2\cdot 3 \quad \binom{8}{2}\binom{6}{1}\binom{4}{4}=\frac{8!}{6!\,2!}\cdot 6\cdot 1=\frac{6!\cdot 7\cdot 8}{6!\cdot 2}\cdot 6\cdot 1=168$

Istnieje 280 liczb naturalnych 8 cyfrowych, w których iloczyn cyfr jest równy 12.

2. Oblicz, ile jest wszystkich liczb stucyfrowych o sumie cyfr równej 5, w zapisie których występują tylko cyfry 0,1,3,5.

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

suma → wynik dodawania

① $5\cdot 10^{9}$ → na pierwszym miejsu stoi 5, pozostałe cyfry to 0 – 1 możliwość

② na pierwszym miejscu stoi 1, pozostałe cyfry to cztery jedynki i dziewiedziesiąt pięć 0.

$$\binom{99}{4}\binom{95}{95}=\frac{99!}{95!\cdot 4!}=\frac{\cancel{95!}\cdot \cancel{96}^{\cancel{32}\,8}\cdot 97\cdot 98\cdot 99}{\cancel{95!}\cdot 1\cdot \cancel{3}^{1}\cdot \cancel{4}^{1}}\cdot 1=3764376 \leftarrow \text{możliwości}$$

③ na pierwszym miejsu stoi 3, pozostałe cyfry to dwie 1 i dziewięćdziesiąt siedem 0.

$$\binom{99}{2}\binom{97}{97}=\frac{99!}{97!\cdot 2!}\cdot 1=\frac{\cancel{97!}\cdot 98\cdot 99}{\cancel{97!}\cdot 1\cdot 2}=4851 \leftarrow \text{możliwości}$$

4. Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

① na pierwszym miejscu liczba nieparzysta

$\underbrace{5\cdot\binom{4}{1}}_{\text{nieparzyste}}\cdot\underbrace{5\cdot5\cdot5\cdot5}_{\text{parzyste}}=5^5\cdot4=12\,500$

② na pierwszym miejscu cyfra parzysta (4 sposoby, bo bez 0).
na cztery z pozostałych miejsc wybieramy cyfry nieparzyste ($\binom{4}{2}\cdot5^2$ sposobów).

$4\cdot\binom{4}{2}\cdot5^2\cdot5\cdot5=4\cdot\binom{4}{2}\cdot5^4=4\cdot\frac{4!}{2!\cdot2!}\cdot5^4=4\cdot\frac{1\cdot\cancel{2}\cdot3\cdot\cancel{4}^{2}}{1\cdot\cancel{2}_1\cdot1\cdot\cancel{2}}\cdot5^4=24\cdot625=15000$

Podsumowanie:

$12\,500+15000=27500$

Liczb naturalnych 5-cyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste jest 27 500.

5. Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że w zapisie dziesiętnym iloczyn wszystkich cyfr każdej z tych liczb jest równy 28.

iloczyn → wynik mnożenia

① $28=4\cdot7$

$\binom{7}{1}\binom{6}{1}\binom{5}{5}=7\cdot6\cdot1=42$

② $28=2\cdot2\cdot7$

$\binom{7}{2}\binom{5}{1}\binom{4}{4}=\frac{7!}{5!\cdot2!}\cdot5\cdot1=\frac{\cancel{5!}\cdot\cancel{6}^{3}\cdot7}{\cancel{5!}\cdot\cancel{2}_1}\cdot5=$
$=3\cdot7\cdot5=105$

Podsumowanie:

$42+105=147$

Istnieje 147 liczb siedmiocyfrowych, w których iloczyn cyfr wynosi 28.