Prawdopodobieństwo

ZAKRES ROZSZERZONY I PODSTAWOWY

Co znajduje się w pliku?

- Doświadczenia losowe
- Zdarzenia elementarne
- Przestrzeń zdarzeń elementarnych
- Twierdzenie o prawdopodobieństwie klasycznym
- Prawdopodobieństwo warunkowe
- Prawdopodobieństwo całkowite
- Wzór Bayesa
- Schemat Bernoulliego

NOTATKI

SZYBKA NAUKA
UPORZĄDKOWANA WIEDZA

Doświadczenie losowe - procedura, którą można wielokrotnie powtarzać i która ma określony zbiór wyników zwany przestrzenią zdarzeń elementarnych. (należy zakładać, że każdy z wyników jest rozłączny z pozostałymi wynikami)

Zdarzenie elementarne - pojedynczy wynik doświadczenia losowego.

Przestrzeń zdarzeń elementarnych - zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych (Ω).

Twierdzenie o prawdopodobieństwie klasycznym

Jeśli przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω jest skończona i wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo podobne, natomiast A jest dowolnym zdarzeniem w tej przestrzeni, to

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

Zadania podstawa

1.W pudełku jest 40 kul. Wśród nich jest 35 kul białych, a pozostałe to kule czerwone. Prawdopodobieństwo wylosowania każdej kuli jest takie samo. Z pudełka losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegające na tym, że otrzymamy kulę czerwoną, jest równe

A. 1/8
B. 1/5
C. 1/40
D. 1/35.

$|\Omega|=40$
35 - kul białych $|B|=35$
5 - kul czerwonych $|C|=5$

$P(C)=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$

wynik należy skracać do ułamka nieskracalnego.

2.W grupie 60 osób (kobiet i mężczyzn) jest 35 kobiet. Z tej grupy losujemy jedną osobę. Prawdopodobieństwo wylosowania każdej osoby jest takie samo. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy mężczyznę, jest równe

A.1/60
B. 1/25
C. 7/12
D. 5/12

$|\Omega|=60$
$|K|=35$
$|M|=25$

$P(M)=\frac{|M|}{|\Omega|}=\frac{25}{60}=\frac{5}{12}$

3.Ze zbioru kolejnych liczb naturalnych {20, 21, 22, ..., 39, 40} losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 4 jest równe

A. 1/4
B. 2/7
C.6/19
D. 3/10

$|\Omega|=21 \longrightarrow \langle 20,40\rangle$ $\boxed{\langle a;b\rangle \quad b-a+1}$

$A=\{20,24,28,32,36,40\}$ $|A|=6$

$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

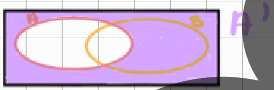
Prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zajdzie zdarzenie B, gdzie $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$, nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

prawdopodobieństwo A pod warunkiem B

Własności:

- $P(A') = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A' \cap B) = P(B - A)$



Zadania rozszerzenie

1. Zdarzenie losowe A i B zawarte w Ω są takie, że prawdopodobieństwo $P(B')$ zdarzenia B', przeciwnego do zdarzenia B, jest równe $\frac{1}{4}$. Ponadto prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B) = \frac{1}{5}$. Wynika stąd, że

A. $P(A \cap B) = \frac{1}{20}$
B. $P(A \cap B) = \frac{4}{15}$
C. $P(A \cap B) = \frac{3}{20}$
D. $P(A \cap B) = \frac{4}{5}$

$P(B') = \frac{1}{4} \longrightarrow P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

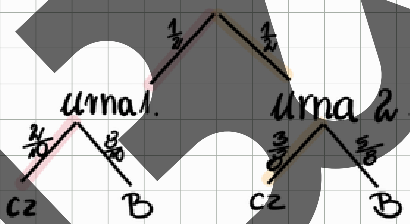
$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ $\quad$ $P(A \cap B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20}$

2. Dane są dwie urny z kulami. W pierwszej urnie jest 10 kul: 8 białych i 2 czarne, w drugiej jest 8 kul: 5 białych i 3 czarne. Wylosowanie każdej z urn jest jednakowo prawdopodobne. Wylosowano jedną z tych urn i wyciągnięto z niej losowo jedną kulę. Wyciągnięta kula była czarna. Prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana kula pochodziła z pierwszej z tych urn, jest równa:

A. $\frac{2}{18}$ $\quad$ C. $\frac{8}{23}$
B. $\frac{15}{23}$ $\quad$ D. $\frac{5}{18}$

A – wylosowanie kuli z urny 1.
B – wylosowana kula jest czarna.



$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P(B) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{80}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

$P(A|B) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{23}{80}} = \frac{1}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{80}}{23} = \frac{8}{23}$

3. Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dodatnich nie większych od 30 losujemy kolejno 2 razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy w ten sposób parę liczb, których iloczyn jest mniejszy od 30 pod warunkiem, że pierwsza wylosowana liczba jest mniejsza od drugiej wylosowanej liczby.

$\langle 1,30 \rangle \longrightarrow 30$ liczb

$\overline{\overline{\Omega}} = 30 \cdot 29 = 870$

A – iloczyn mniejszy od 30

B – pierwsza wylosowana liczba mniejsza od drugiej

①

$$B = \left\{ \begin{array}{l} (1,2),(1,3),(1,4),\ldots,(1,30), \\ (2,3),(2,4),(2,5),\ldots,(2,30), \\ (3,4),(3,5),(3,6),\ldots,(3,30), \\ (4,5),(4,6),(4,7),\ldots,(4,30),\ldots \\ (29,30) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 29 \\ 28 \\ 27 \\ 26 \\ 1 \end{array}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \qquad S_{29} = \frac{29+1}{2} \cdot 29 = 15 \cdot 29$$

$$P(B) = \frac{15 \cdot 29}{870}$$

②

$$A \cap B = \left\{ \begin{array}{l} (1,2),(1,3),(1,4),\ldots,(1,29), \\ (2,3),(2,4),(2,5),\ldots,(2,14), \\ (3,4),(3,5),(3,6),\ldots,(3,9), \\ (4,5),(4,6),(4,7) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 28 \\ 12 \\ 6 \\ 3 \end{array}$$

$$\overline{\overline{A \cap B}} = 28 + 12 + 6 + 3 = 49$$

$$P(A \cap B) = \frac{49}{870}$$

③

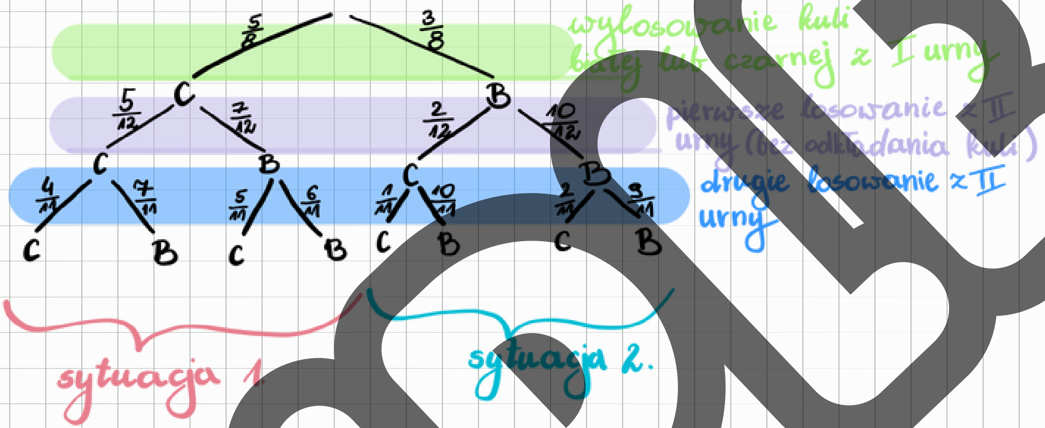
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{49}{870}}{\frac{15 \cdot 29}{870}} = \frac{49}{\cancel{870}_{1}} \cdot \frac{\cancel{870}^{1}}{15 \cdot 29} = \frac{49}{435}$$

Prawdopodobieństwo wynosi $\frac{49}{435}$.

3.W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do urny drugiej i dodatkowo dokładamy do urny drugiej jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe.

① 3B 5C — I urna; kule czarne → 7B 5C — II urna

② 3B 5C — I urna; kule białe → 10B 2C — II urna



A - obie kule z drugiej urny będą białe

$$P(A) = \frac{3}{8}\cdot\frac{10}{12}\cdot\frac{9}{11} + \frac{5}{8}\cdot\frac{7}{12}\cdot\frac{6}{11} = \frac{210}{1056} + \frac{270}{1056} = \frac{480}{1056} = \frac{5}{11}$$

Prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych wynosi $\frac{5}{11}$.

Wzór Bayesa

wzór Bayesa / wzór na prawdopodobieństwo przyczyny

Niech Ω będzie zbiorem wszystkich wyników pewnego doświadczenia. Jeśli zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ spełniają następujące warunki:

→ zawsze zachodzi przynajmniej jedno z nich ($B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$)

→ prawdopodobieństwo każdego z nich jest dodatnie

→ zdarzenia te parami się wykluczają

to dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ o dodatnim prawdopodobieństwie prawdziwy jest wzór:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)\cdot P(A|B_k)}{P(B_1)\cdot P(A|B_1) + P(B_2)\cdot P(A|B_2) + \ldots + P(B_n)\cdot P(A|B_n)}$$

Udowodnienie wzoru Bayesa:

Dowód:

① korzystam ze wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe, jeśli $A \subset \Omega$ i $B_k \subset \Omega$, gdzie $k = 1, 2, \ldots, n$ oraz:

· $P(A) > 0$, to $P(A \cap B_k) = P(B_k|A)\cdot P(A)$

· $P(B_k) > 0$, to $P(A \cap B_k) = P(A|B_k)\cdot P(B_k)$

$$P(B_k|A)\cdot P(A) = P(A|B_k)\cdot P(B_k) \quad | : P(A)$$

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)\cdot P(B_k)}{P(A)}$$

② Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite, wiemy:

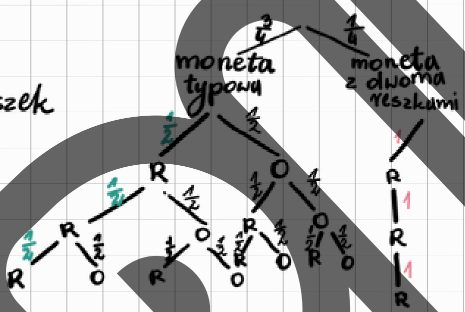
$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A|B_1) + P(B_2)\cdot P(A|B_2) + \ldots + P(B_n)\cdot P(A|B_n)$$

Podstawiamy: $P(B_k|A) = \dfrac{P(B_k)\cdot P(B|B_k)}{P(B_1)\cdot P(A|B_1) + P(B_2)\cdot P(A|B_2) + \ldots + P(B_n)\cdot P(A|B_n)}$ ■ cnd.

Zadania rozszerzenie

1. W szkatułce znajduje się 20 monet z których 15 to monety typowe (mają orła i resztę), a pozostałe mają po obu stronach reszki. Rzucono trzykrotnie losowo wybraną monetą i otrzymano trzy reszki. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucono monetą typową.

B_1 - wybranie monety typowej
B_2 - wybranie monety z dwoma reszkami
A - zdarzenie polegające na wyrzuceniu trzech reszek



$P(B_1)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$ $\qquad P(B_2)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

$P(A|B_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

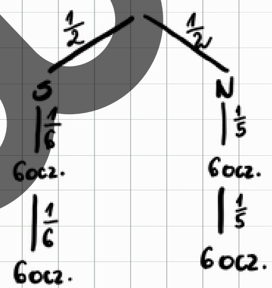
$P(A|B_2)=1\cdot 1\cdot 1=1$

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)\cdot P(A|B_1)}{P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)}$$

$$P(B_1|A)=\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot 1}=\frac{\frac{3}{32}}{\frac{3}{32}+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{32}}{\frac{11}{32}}=\frac{3}{32}\cdot\frac{32}{11}=\frac{3}{11}$$

2. Z dwóch kostek jedna symetryczna, a dla drugiej prawdopodobieństwo otrzymania 6 jest równe $\frac{1}{5}$. Rzucono dwukrotnie rosowo wybraną kostką i wypadły dwie szóstki. Oblicz prawdopodobieństwo tego że rzucono kostką niesymetryczną.

S - kostka symetryczna
N - kostka, której prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{5}$
A - wypadły dwie szóski



$$P(N|A)=\frac{P(N)\cdot P(A|N)}{P(N)\cdot P(A|N)+P(S)\cdot P(A|S)}$$

$$P(N|A)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{25}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{36}}=\frac{\frac{1}{2\cdot 25}}{\frac{61}{2\cdot 25\cdot 36}}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 25}\cdot\frac{2\cdot 25\cdot 36}{61}=\frac{36}{61}$$ rzut kostką niesymetryczną

3. Mamy dwie symetryczne kostki. Jedna jest klasyczna (z liczbami oczek 1,2,3,4,5, 6,) natomiast na ściankach drugiej są następujące liczby oczek: 1,3,5,5,6,6. Rzucamy dwukrotnie wybraną losowo kostką. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że rzucono klasyczną kostką, jeśli suma wyrzuconych oczek była równa: a) 4, f) 11

$K1 \rightarrow 1,2,3,4,5,6$
$K2 \rightarrow 1,3,5,5,6,6$

a) suma oczek = 4 $\quad A$ - prawdopodobieństwo, że przy dwóch rzutach suma oczek równa 4

$K1 \rightarrow (1\ 3),(3\ 1),(2\ 2)$

$P(A|K1)=\frac{3}{36}$ ← wszystkie opcje ($6\cdot 6=36$)

$K2 \rightarrow (1\ 3),(3\ 1)$

$P(A|K2)=\frac{2}{36}$

$$P(K1|A)=\frac{P(K_1)\cdot P(A|K_1)}{P(K_1)\cdot P(A|K_1)+P(K_2)\cdot P(A|K_2)}$$

$$P(K1|A)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{36}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{36}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{36}}=\frac{3}{2\cdot 36}\cdot\frac{2\cdot 36}{5}=\frac{3}{5}$$ prawdopodobieństwo, że przy dwóch rzutach suma oczek równa 4

Schemat Bernoulliego

→ wielokrotne powtórzenie tego samego doświadczenia losowego (każde doświadczenie to PRÓBA BERNOULLIEGO), o dwóch możliwych wynikach - każde z dodatnim prawdopodobieństwem.

WYNIK I	WYNIK II
p	q
SUKCES	PORAŻKA

→ WZÓR:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$P_n(k)$ - prawdopodobieństwo otrzymania k sukcesów w n próbach
n - liczba prób
k - liczba sukcesów
p - prawdopodobieństwo sukesu w pojedyńczej próbie
q - prawdopodobieństwo porażki w pojedyńczej próbie

$\boxed{q = 1 - p}$

Zadania rozszerzenie

1. 8 razy rzucamy symetryczna monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w tych 8 rzutach co najwyżej 2 razy wypadanie orzeł?

$p = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{2} \quad n = 8 \quad k = 0 \lor k = 1 \lor k = 2$

$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad P = P_8(0) + P_8(1) + P_8(2)$

$$P = \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-0} + \binom{8}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-1} + \binom{8}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-2}$$

$$P = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2^8} + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{\cancel{8!}^{\,7\cdot 8^{4}}}{\cancel{6!}_{1} \cdot \cancel{2!}_{1}} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^6}$$

$$P = \frac{1}{2^8} + \frac{8}{2^8} + \frac{28}{2^8}$$

$$P = \frac{1+8+28}{2^8} = \frac{37}{2^8}$$

2. Koszykarka wykonuje rzuty osobiste do kosza w ramach testu sprawności. Trafia ona średnio do kosza 8 na 10 razy. By zaliczyć te z koszykarka musi trafić minimum 22 na 25 oddanych rzutów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zaliczy ona test za pierwszym razem?

$P = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \quad q = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \quad n = 25 \quad k = 22 \lor k = 23 \lor k = 24 \lor k = 25$

$$P = P_{25}(22) + P_{25}(23) + P_{25}(24) + P_{25}(25)$$

$$P = \binom{25}{22} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{22} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{25-22} + \binom{25}{23} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{23} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{25-23} + \binom{25}{24} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{24} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{25-24} + \binom{25}{25} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{25} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{25-25}$$

$$P = \frac{25!}{22! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{22} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3} + \frac{25!}{23! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{23} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2} + 25 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{24} \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{25} \cdot 1$$

$$P = 2300 \cdot \frac{4^{22}}{5^{25}} + 300 \cdot \frac{4^{23}}{5^{25}} + 25 \cdot \frac{4^{24}}{5^{25}} + \frac{4^{25}}{5^{25}}$$

$$P = \frac{2300 \cdot 4^{22} + 300 \cdot 4^{23} + 25 \cdot 4^{24} + 4^{25}}{5^{25}} = \frac{4^{22}(2300 + 300 \cdot 4 + 25 \cdot 16 + 64)}{5^{25}} = \frac{4^{22} \cdot 3964}{5^{25}} \approx 0{,}234$$

3. W schemacie cztery prób bernoulliego prawdopodobieństwo otrzymania samych sukcesów wynosi $\frac{16}{625}$.
Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania sukcesów w pojedynczej próbie?

$P_4(4) = \frac{16}{625} \qquad P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

$n = 4 \quad k = 4 \qquad \frac{16}{625} = \binom{4}{4} \cdot p^4 \cdot q^0$

$\frac{16}{625} = 1 \cdot p^4 \cdot 1$

$\frac{16}{625} = p^4 \qquad p > 0$

$p = \frac{2}{5}$ ← prawdopodobieństwo otrzymania sukcesu w pojedynczej próbie