Funkcja wymierna

ZAKRES
ROZSZERZONY
I
PODSTAWOWY

Co znajduje się w pliku?

- Ułamki algebraiczna (skracenie, dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie)
- Równania wymierne
- Nierówności wymierne
- Zadania tekstowe
- Proporcjonalność odwrotna
- Funkcja homograficzna

NOTATKI
SZYBKA NAUKA
UPORZĄDKOWANA WIEDZA

Ułamki algebraiczne

$\boxed{\frac{R(x)}{Q(x)}}$ Ułamek algebraiczny zmiennej rzeczywistej x to wyrażenie, którego licznikiem i mianownikiem są wielomiany $R(x)$ i $Q(x)$, gdzie $Q(x)$ jest różne od zera.

→ Dziedzina ułamka algebraicznego

R - liczby rzeczywiste

- $\frac{5}{x}$ $\quad x\neq 0 \quad D=R\setminus\{0\}$
- $\frac{4}{x-1}$ $\quad x-1\neq 0 \quad x\neq 1 \quad D=R\setminus\{1\}$
- $\frac{-1}{(x+2)(2x+6)}$ $\quad x+2\neq 0 \lor 2x+6\neq 0$
  $x\neq -2 \lor 2x\neq -6$
  $x\neq -3$
  $D=R\setminus\{-3,-2\}$

$\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$

- $\frac{3}{(x^2+2)(x^2-25)}$ $\quad x^2+2\neq 0 \lor x^2-25=0$
  $x^2\neq -2$ — sprzeczność
  $(x-5)(x+5)=0$
  $x=5 \lor x=-5$
  $D=R\setminus\{-5,5\}$

- $\frac{3}{(x^2+2x+1)(x^2-12x+36)}$ $\quad x^2+2x+1\neq 0 \lor x^2-12x+36\neq 0$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

  $(x+1)^2\neq 0 \qquad (x-6)^2\neq 0$
  $x\neq -1 \qquad x\neq 6$
  $D=R\setminus\{-1,6\}$

- $\frac{56x}{6x^2+4x-2}$ $\quad 6x^2+4x-2\neq 0 \quad a=6 \; b=4 \; c=-2$
  $\Delta=16+48=64 \quad \sqrt{\Delta}=8$
  $x_1=\frac{-4-8}{12}=-1 \qquad x_2=\frac{-4+8}{12}=\frac{1}{3}$
  $D=R\setminus\{-1,\frac{1}{3}\}$

→ Skracanie ułamków

- $\frac{x^2-25}{3x-15}=\frac{\cancel{(x-5)}(x+5)}{3\cancel{(x-5)}}=\frac{x+5}{3}$

$3x-15\neq 0 \Rightarrow 3x\neq 15 \Rightarrow x\neq 5 \qquad x\in R\setminus\{5\}$

- $\dfrac{x^2-8x}{x^2-64} = \dfrac{x\cancel{(x-8)}}{\cancel{(x-8)}(x+8)} = \dfrac{x}{(x+8)}$

$x^2-64 \neq 0 \Rightarrow (x-8)(x+8) \neq 0 \Rightarrow x \neq 8 \lor x \neq -8 \Rightarrow x \in R \setminus \{-8, 8\}$

- $\dfrac{x^2-18x+81}{9x-x^2} = \dfrac{(x-9)^{\cancel{2}}}{-x\cancel{(x-9)}} = \dfrac{(x-9)}{-x} = \dfrac{-(x-9)}{x} = \dfrac{-x+9}{x}$

$9x-x^2 \neq 0 \Rightarrow x(9-x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \lor x \neq 9 \Rightarrow x \in R \setminus \{0, 9\}$

- $\dfrac{49-14x+x^2}{3x^2-21x} = \dfrac{(7-x)^2}{3x(x-7)} = \dfrac{\cancel{(7-x)}(7-x)}{-3x\cancel{(7-x)}} = \dfrac{7-x}{-3x} = \dfrac{x-7}{3x}$

$3x^2-21x \neq 0 \Rightarrow 3x(x-7) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \lor x \neq 7 \Rightarrow x \in R \setminus \{0, 7\}$

- $\dfrac{x^3-9x}{x^2-2x-3} = \dfrac{x(x^2-9)}{(x+1)(x+3)} = \dfrac{x(x-3)\cancel{(x+3)}}{(x+1)\cancel{(x+3)}} = \dfrac{x(x-3)}{x+1}$

Zawsze w tego typu zadaniach, gdy pojawia się funkcja kwadratowa zapisujemy ją w postaci iloczynowej.

$x^2-2x-3 \neq 0 \quad a=1 \quad b=-2 \quad c=-3$

$\Delta = 4+12 = 16 \quad \sqrt{\Delta} = 4 \quad x_1 = \dfrac{2-4}{2} = -1 \quad x_2 = \dfrac{2+4}{2} = 3$

$(x+1)(x-3) \neq 0 \quad x \neq -1 \lor x \neq 3 \quad x \in R \setminus \{-1, 3\}$

- $\dfrac{-x^2+8x+20}{100-x^2} = \dfrac{-(x-10)(x+2)}{(10-x)(10+x)} = \dfrac{-\cancel{(x-10)}(x+2)}{-\cancel{(x-10)}(x+10)} = \dfrac{x+2}{x+10}$

$100-x^2 \Rightarrow (10-x)(10+x) \neq 0 \Rightarrow x \neq 10 \lor x \neq -10 \Rightarrow x \in R \setminus \{-10, 10\}$

$-x^2+8x+20=0 \quad a=-1 \quad b=8 \quad c=20$

$\Delta = 64+80 = 144 \quad \sqrt{\Delta} = 12 \quad x_1 = \dfrac{-8-12}{-2} = 10 \lor x_2 = \dfrac{-8+12}{-2} = -2$

$-(x-10)(x+2) = 0$

- $\dfrac{x^3+4x^2-2x-8}{4(x+\sqrt{2})} = \dfrac{x^2(x+4)-2(x+4)}{4(x+\sqrt{2})} = \dfrac{(x^2-2)(x+4)}{4(x+\sqrt{2})} =$

$= \dfrac{(x-\sqrt{2})\cancel{(x+\sqrt{2})}(x+4)}{4\cancel{(x+\sqrt{2})}} = \dfrac{(x-\sqrt{2})(x+4)}{4}$

$4(x+\sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow x+\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow x \neq -\sqrt{2} \Rightarrow x \in R \setminus \{-\sqrt{2}\}$

- $\frac{1}{x^2-x-6} - \frac{4x+5}{-2x^2+8} = \frac{1}{(x+2)(x-3)} - \frac{4x+5}{-2(x-2)(x+2)} = \frac{2(x-2)}{2(x+2)(x-2)(x-3)} + \frac{(4x+5)(x-3)}{2(x+2)(x-2)(x-3)} =$

$= \frac{2x-4+4x^2-12x+5x-15}{2(x-2)(x+2)(x-3)} = \frac{4x^2-5x-19}{2(x-2)(x+2)(x-3)}$

$x^2-x-6 \neq 0$ $\quad \Delta = 1+24 = 25 \quad \sqrt{\Delta}=5 \quad \vee$ $\quad -2x^2+8 \neq 0$

$x \neq \frac{1-5}{2} \neq -2 \quad \vee \quad x \neq \frac{1+5}{2} \neq 3$ $\quad -2(x^2-4) \neq 0$

$(x+2)(x-3) \neq 0$ $\quad 2(x-2)(x+2) \neq 0$

$x \neq 2 \quad \vee \quad x \neq -2$

$x \in R \setminus \{-2, 2, 3\}$

→ Działania na ułamkach - mnożenie i dzielenie

- $\frac{\cancel{x}}{\cancel{7}_1} \cdot \frac{\cancel{14}^2}{\cancel{x^3}^{2}} = \frac{2}{x^2}$ $\qquad x \neq 0 \Rightarrow x \in R \setminus \{0\}$

- $\frac{x+2}{6} \cdot \frac{8}{x^2-4} = \frac{\cancel{x+2}^1}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{8}^4}{(x-2)\cancel{(x+2)}_1} = \frac{4}{3(x-2)}$

$x^2-4 \neq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \vee x \neq -2 \Rightarrow x \in R \setminus \{-2, 2\}$

- $\frac{12}{3x-1} \cdot \frac{9x^2-6x+1}{15} = \frac{\cancel{12}^4}{\cancel{(3x-1)}} \cdot \frac{(3x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{15}_5} = \frac{4(3x-1)}{5}$

$3x-1 \neq 0 \Rightarrow 3x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{3} \Rightarrow x \in R \setminus \{\frac{1}{3}\}$

- $\frac{6x^2-7x-5}{(x-1)(x+2)} : \frac{(3x-5)\cdot 2}{x^2-1} = \frac{6x^2-7x-5}{\cancel{(x-1)}(x+2)} \cdot \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{2\cdot(3x-5)} = \frac{\cancel{6}^1(x+\frac{1}{2})\cancel{(x-\frac{5}{3})}^1}{x+2} \cdot \frac{x+1}{\cancel{2\cdot 3}_1\cancel{(x-\frac{5}{3})}_1} = \frac{(x+\frac{1}{2})(x+1)}{x+2} =$

$= \frac{x^2+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x+2} = \frac{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}{x+2} = \frac{(x+1)(x+\frac{1}{2})}{x+2}$

$6x^2-7x-5=0$ $\quad a=6 \quad b=-7 \quad c=-5$

$\Delta = 49+120 = 169$ $\quad \sqrt{\Delta}=13$

$x_1 = \frac{7-13}{12} = -\frac{1}{2}$ $\quad x_2 = \frac{7+13}{12} = \frac{5}{3}$

$6(x+\frac{1}{2})(x-\frac{5}{3}) = 0$

$(x-1)(x+2) \neq 0 \quad \vee \quad x^2-1 \neq 0 \quad \vee \quad 3x-5 \neq 0$

$x \neq 1 \vee x \neq -2 \vee x \neq 1 \vee x \neq -1 \vee x \neq \frac{5}{3}$

$x \in R \setminus \{-2, -1, 1, \frac{5}{3}\}$

$x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0$ $\quad a=1 \quad b=\frac{3}{2} \quad c=\frac{1}{2}$

$\Delta = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$

$\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$

$(x+1)(x+\frac{1}{2}) = 0$

→ Równania wymierne - roszerzenie

- $\frac{1}{x+2} - \frac{3}{x-5} = \frac{4}{x^2-3x-10}$

Dziedzina:

$x+2 \neq 0 \quad \vee \quad x-5 \neq 0 \quad \vee \quad x^2-3x-10 \neq 0$

$x \neq -2 \qquad x \neq 5$

$\Delta = 9+40 = 49 \quad \sqrt{\Delta} = 7$

$x = \frac{3-7}{2} \neq -2$

$x = \frac{3+7}{2} \neq 5 \qquad x \in R \setminus \{-2, 5\}$

$$\frac{x-5}{(x+2)(x-5)} - \frac{3(x+2)}{(x-5)(x+2)} = \frac{4}{(x+2)(x-5)}$$

$$\frac{x-5-3x-6}{(x+2)(x-5)} = \frac{4}{(x+2)(x-5)}$$

$$\frac{-2x-11}{(x+2)(x-5)} - \frac{4}{(x+2)(x-5)} = 0$$

$$\frac{-2x-15}{(x+2)(x-5)} = 0$$

$-2x-15 = 0$

$2x = -15$

$x = -7{,}5$

odp: $x = -7{,}5$

- $\frac{x+3}{x(x-2)} + \frac{1}{x+2} = \frac{4x}{(x-2)(x+2)}$

$x-2 \neq 0 \quad \vee \quad x+2 \neq 0 \quad \vee \quad x \neq 0$

$x \neq 2 \qquad x \neq -2$

$x \in R \setminus \{-2, 0, 2\}$

$$\frac{(x+3)(x+2)}{x(x-2)(x+2)} + \frac{(x-2)x}{x(x-2)(x+2)} - \frac{4x^2}{x(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\frac{x^2+2x+3x+6+x^2-2x-4x^2}{x(x-2)(x+2)} = 0$$

$$\frac{-2x^2+3x+6}{x(x-2)(x+2)} = 0$$

$-2x^2+3x+6 = 0 \qquad \Delta = 9+48 = 57 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{57}$

$x_1 = \frac{-3-\sqrt{57}}{-4} = \frac{3+\sqrt{57}}{4} \qquad x_2 = \frac{-3+\sqrt{57}}{-4} = \frac{3-\sqrt{57}}{4}$

odp: $x \in \left\{\frac{3-\sqrt{57}}{4}; \frac{3+\sqrt{57}}{4}\right\}$

Nierówności wymierne
roszerzenie

Dowolna liczba rzeczywista podniesiona do parzystej potęgi daje liczbę nieujemną.

Mnożąc lub dzieląc obustronnie dowolną nierówność, trzeba znać znak liczby, przez którą mnożymy lub dzielimy.

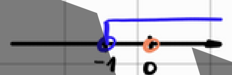
→ W mianowniku znajduje się liczba nieujemna

- $x^2 \neq 0 \quad x \neq 0 \quad x \in R \setminus \{0\}$

$\frac{1+x}{x^2} > 0 \quad | \cdot x^2$ ← liczba dodatnia, więc można mnożyć

$1 + x > 0$

$x > -1$



$x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$

- $x \neq 0$

$\frac{4(-2-3x)}{3x^2} < 0 \quad | \cdot 3x^2$

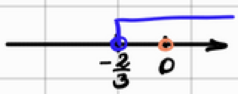
$4(-2-3x) < 0$

$-8 - 12x < 0$

$-8 < 12x \quad | : 12$

$x > -\frac{8}{12}$

$x > -\frac{2}{3}$



$x \in \left(-\frac{2}{3}, \infty\right) \setminus \{0\}$

→ W mianowniku znajduje się liczba o nieokreślonym znaku

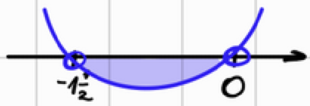
- $\frac{3+2x}{x} < 0 \;\Big|\cdot x^2$ $\quad x \neq 0$

$(3+2x)\cdot x < 0$

$3+2x=0 \quad \vee \quad x=0$

$2x=-3$

$x=-1\frac{1}{2}$



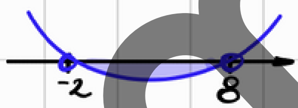
$x \in \left(-1\frac{1}{2}; 0\right)$

- $\frac{x-8}{2+x} < 0 \;\Big|\cdot (2+x)^2$ $\quad 2+x \neq 0$, $\; x \neq -2$

$(x-8)(2+x) < 0$

$x-8=0 \quad \vee \quad 2+x=0$

$x=8 \quad \vee \quad x=-2$



$x \in (-2, 8)$

- $\frac{6x-2}{x+1} \geq 0 \;\Big|\cdot (x+1)^2$ $\quad x+1 \neq 0$, $\; x \neq -1$

$(6x-2)(x+1) \geq 0$

$6x-2=0 \quad \vee \quad x+1=0$

$6x=2 \qquad x=-1$

$x=\frac{1}{3}$

$x \in (-\infty, -1) \cup \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

- $\frac{2x+1}{3x-6} \leq 2 \;\Big| -2$ $\quad 3x-6 \neq 0$, $\; 3x \neq 6$, $\; x \neq 2$

$\frac{2x+1}{3x-6} - 2 \leq 0$

$\frac{2x+1}{3x-6} - \frac{2(3x-6)}{3x-6} \leq 0$

$\frac{2x+1-6x+12}{3x-6} \leq 0$

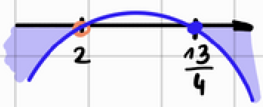
$\frac{-4x+13}{3x-6} \leq 0 \;\Big|\cdot (3x-6)^2$

$(-4x+13)(3x-6) \leq 0$

$-4\left(x-\frac{13}{4}\right)\cdot 3(x-2) \leq 0$

$-12\left(x-\frac{13}{4}\right)(x-2) \leq 0$

$x=\frac{13}{4} \quad \vee \quad x=2$



$x \in (-\infty, 2) \cup \left[\frac{13}{4}, \infty\right)$

Równania wymierne, a zadania tekstowe

Kiedy ktoś mówi o całej wykonanej pracy, ma na myśli „1".

Jeśli pomnożysz czas [h] potrzebny do wykonania całej pracy oraz wykonywaną na godzinę, otrzymasz 1 - cała praca.

(czas pracy) · (ilość pracy wykonana na 1h) = 1 (cała praca)

Wzór na prędkość:

$V = \frac{s}{t}$

v - prędkość
s - droga
t - czas

Pamiętaj o uzgadnianiu jednostek.

1. Na pewnej biblioteczce mieści się 60 egzemplarzy książek dla maturzystów. Gdyby półki były szersze i na każdej półce umieszczono o trzy książki więcej, wtedy książki zajęłyby o jedną półkę mniej. Ile jest półek w tej biblioteczce? Ile książek mieści się na każdej z tych półek?

x - liczba książek na półce $\quad x > 0$

I $\frac{60}{x}$ - liczba półek w sytuacji I

II

$\frac{60}{x+3}$ - liczba półek w sytuacji II $\quad x+3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$

$$\frac{60}{x+3} + 1 = \frac{60}{x}$$

$$\frac{60+x+3}{x+3} = \frac{60}{x}$$

$$x(63+x) = 60(x+3)$$

$$63x + x^2 = 60x + 180$$

$$x^2 + 3x - 180 = 0$$

$$\Delta = 9 + 720 = 729 \qquad \sqrt{\Delta} = 27$$

$$x_1 = \frac{-3-27}{2} < 0$$ nie należy do dziedziny

$$x_2 = \frac{-3+27}{2} = \frac{24}{2} = 12$$ → liczba książek

$$\frac{60}{x} = \frac{60}{12} = 5$$ → liczba półek

⑤ Układ równań

$$\begin{cases}20(x+y)=1 & |:20\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}=45 & |\cdot 2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=\frac{1}{20}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=90 & |\cdot xy\end{cases}$$

$\frac{1}{x}\cdot xy=y$

$\frac{1}{y}\cdot xy=x$

$$\begin{cases}x=\frac{1}{20}-y\\ y+x=90xy\end{cases}$$

$$y+\frac{1}{20}-y=90\left(\frac{1}{20}-y\right)y$$

$$\frac{1}{20}=\frac{90y}{20}-90y^2 \quad |\cdot 20$$

$$1=90y-1800y^2$$

$$1800y^2-90y+1=0 \qquad \Delta=8100-7200=900 \quad \sqrt{\Delta}=30$$

$$y_1=\frac{90-30}{3600}=\frac{60}{3600}=\frac{1}{60} \qquad y_2=\frac{90+30}{3600}=\frac{120}{3600}=\frac{1}{30}$$

$$x_1=\frac{1}{20}-\frac{1}{60}=\frac{3}{60}-\frac{1}{60}=\frac{2}{60}=\frac{1}{30} \qquad x_2=\frac{1}{20}-\frac{1}{30}=\frac{3}{60}-\frac{2}{60}=\frac{1}{60}$$

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{30}\\ y_1=\frac{1}{60}\end{cases} \qquad \begin{cases}x_2=\frac{1}{60}\\ y_2=\frac{1}{30}\end{cases}$$

Pracując oddzielnie jednemu rolnikowi wykonanie całej pracy zajęłoby 30h, a drugiemu 60h.

4. Rowerzysta przemierzył drogę 36 km z jednostajną prędkością w określonym czasie, poruszając się z domu do parku. Kiedy wracał z parku do domu tą samą drogą, postanowił pokonać trasę w tym samym czasie. Pierwsze 20 minut przemierzył z taką samą prędkością, jak z domu do parku. Jednak po przejechaniu tego odcinka postanowił się zatrzymać na 10. Dalszą część trasy musiał pokonać z prędkością o 2 km na godzinę większą, by wyrobić się w założonym czasie. Z jaką prędkością jechał rowerzysta z domu do parku? Ile czasu zajęło mu dotarcie z domu do parku?

$V=\frac{s}{t} \Rightarrow s=V\cdot t$

DOM | $s=36km$ t V | PARK

$s=36km$

$t \rightarrow$ I: $20min$ ($\frac{1}{3}h$, V) $\rightarrow$ przerwa $10min$ ($\frac{1}{6}h$) $\rightarrow$ II: $t-20min-10min=t-30min=t-\frac{1}{2}h$ ($V+2$)

$t>0$
$V>0$

$20min=\frac{20}{60}h=\frac{1}{3}h$

$10min=\frac{10}{60}h=\frac{1}{6}h$

$30min=\frac{30}{60}h=\frac{1}{2}h$

$vt=s$

$$\begin{cases}Vt=36\\ \frac{1}{3}V+(V+2)\left(t-\frac{1}{2}\right)=36\end{cases}$$

Funkcja wymierna - zadania maturalne (podstawa)

1. Rozwiąż równanie: $\frac{(4x+1)(x-5)}{(2x-10)(x+3)} = 0.$

$\frac{(4x+1)(x-5)}{(2x-10)(x+3)} = 0$

$2x-10 \neq 0$
$2x \neq 10$
$x \neq 5$

$x+3 \neq 0$
$x \neq -3$

$(4x+1)(x-5)=0$

$x \in R \setminus \{-3,5\}$

$4x+1=0 \lor x-5=0$
$4x=-1$
$x=-\frac{1}{4}$

$\underbrace{x=5}_{\text{nie należy do dziedziny}}$

odp: $x=-\frac{1}{4}$

2. Rozważmy taki liczby rzeczywiste a i b, które spełniają warunki:
$a \neq 0, b \neq 0$ oraz $a^3 + b^3 = (a+b)^3$.
Oblicz wartość liczbową wyrażenia $\frac{a}{b}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b, spełniających powyższe warunki.

$\frac{a}{b} = ?$

$a^3+b^3=(a+b)^3$ $\quad a\neq 0 \lor b \neq 0$

$\cancel{a^3}+\cancel{b^3}=\cancel{a^3}+3a^2b+3ab^2+\cancel{b^3}$

$0=3a^2b+3ab^2$

$0=3ab(a+b)$

$0=a+b$

$a=-b \quad |:b$

$\frac{a}{b}=-1$

3. Dane są dwie liczby x i y, takie, że iloraz $\frac{x}{y}$ jest równy $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Oblicz wartość wyrażenia $\frac{x+y}{x}$. Wynik podaj bez **niewymierności** w mianowniku.

$y \neq 0$
$x \neq 0$

$\frac{x}{y}=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x=\frac{(1+\sqrt{5})y}{2} \Rightarrow y=\frac{2x}{1+\sqrt{5}}$

$\frac{x+y}{x}=\frac{x+\frac{2x}{1+\sqrt{5}}}{x}=\frac{x}{x}+\frac{2x}{(1+\sqrt{5})x}=1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}=1+\frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5}=1+\frac{2-2\sqrt{5}}{-4}=1-\frac{2-2\sqrt{5}}{4}=\frac{4-2+2\sqrt{5}}{4}=\frac{2+2\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4.

Dane jest wyrażenie $W(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right)$.
Oceń prawdziwość poniższych zdań. Zaznacz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Wartość wyrażenia $W(x)$ jest określana dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$.	P	F
2.	Wyrażenie $W(x)$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $\frac{2x}{x^2-1}$.	P	F

① $x-1 \neq 0 \quad \vee \quad x+1 \neq 0$

$x \neq 1 \qquad x \neq -1 \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

② $\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} - \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}-\cancel{x^2}+2x-\cancel{1}}{(x-1)(x+1)}\right) =$

$= \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}x}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{x^2-1}$

5.

Funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{-3x+41}{x-13}$ dla $x \neq 13$.
Punktem kratowym nazywamy punkt w układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi.
Wyznacz wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji f.

$f(x) = \frac{-3x+41}{x-13} \qquad x \neq 13$

$f(x) = \frac{-3(x-13)+2}{x-13} = -3 + \frac{2}{x-13}$

$x-13=2 \quad \vee \quad x-13=-2 \quad \vee \quad x-13=-1 \quad \vee \quad x-13=1$

$x=15 \qquad x=11 \qquad x=12 \qquad x=14$

$\begin{cases} x=15 \\ y=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=11 \\ y=-4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=12 \\ y=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=14 \\ y=-1 \end{cases}$

6.

Punkt $A = (-5,3)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji homograficznej określonej wzorem $f(x) = \frac{ax+7}{x+d}$, gdy $x \neq -d$. Oblicz iloraz $\frac{d}{a}$.
W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

$A=(-5,3) \qquad x \neq -d \qquad \frac{d}{a} = ?$

$f(x) = \frac{ax+7}{x+d}$

$a=3$

$d=5$

$f(x) = \frac{a(x+d)-ad+7}{x+d}$

$f(x) = a + \frac{7-ad}{x+d}$

$\frac{d}{a} = \frac{5}{3} \approx 1,666$

$x+d=0$

$-5+d=0$

$d=5$

1	6	6

Proporcjonalność odwrotna

Zależność między dwiema wielkościami zmiennymi x,y określoną wzorem $x \cdot y = a$, gdzie $a \neq 0$. O zmiennych x i y mówimy, że są **odwrotnie proporcjonalne**. Współczynnik a nazywamy **współczynnikiem proporcjonalności odwrotnej**.

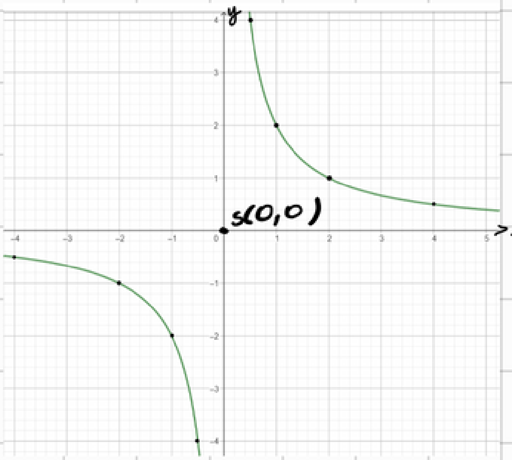
Wykresem funkcji określonej wzorem $y = \frac{a}{x}$ jest **hiperbola**.

Prosta $y=0$ jest asymptotą poziomą, a prosta $x=0$ jest asymptotą pionową.

→ Wykres

• $f(x) = \frac{2}{x}$

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$



D: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Z_w: $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Środek symetri: $S(0,0)$

Miejsca zerowe: brak

Miejsce przecięcia wykresu funkcji z osią OY: brak

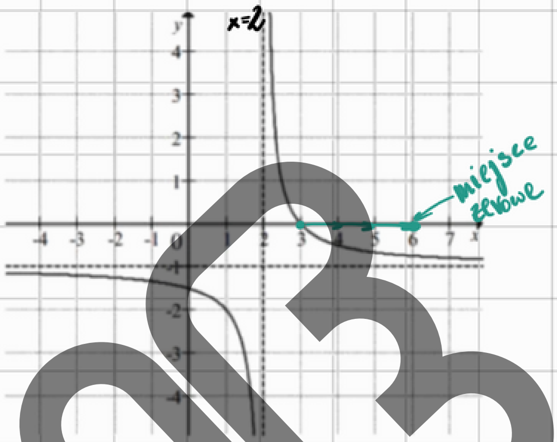
Asymptota pozioma: $y=0$, Asymptota pionowa: $x=0$

Monotoniczność: funkcja malejąca w przedziałach: $(-\infty;0)$, $(0,\infty)$

4.Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji f, który powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji określonej wzorem y= $\frac{1}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej x $\neq$ 0

a) Odczytaj z wykresu i zapisz zbiór wszystkich tych argumentów, dla których wartości funkcji f są większe od 0.

b) Podaj miejsce zerowe funkcji g gdzie wzorem g(x)=f(x-3).



a) $y = \frac{1}{x}$ $\quad x \neq 0$

$f(x) > 0 \iff x \in (2;3)$

b) $g(x) = f(x-3)$

$g(x) = 0$

$(6,0)$

Funkcja homograficzna
rozszerzenie

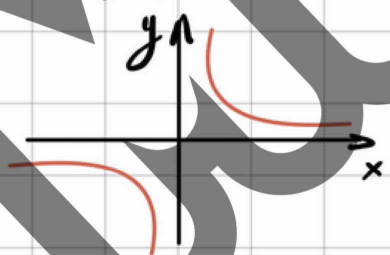
→ funkcja wymierna

→ postać ogólna: $y = \frac{Ax + B}{Cx + D}$ $\quad$ $\boxed{\begin{array}{c} C \neq 0 \\ AD - CB \neq 0 \\ D \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{D}{C}\} \end{array}}$

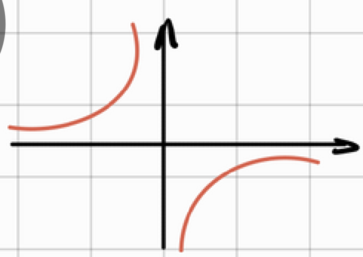
→ postać kanoniczna $y = \frac{a}{x-p} + q$ $\quad$ $\boxed{x - p \neq 0}$

→ wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola.

$f(x) = \frac{a}{x}$ $\quad x \neq 0$



$a > 0$
funkcja malejąca



$a < 0$
funkcja rosnąca

→ Zamiana postaci funkcji

- $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ $\quad$ $x - 2 \neq 0$, $x \neq 2$

$f(x) = \frac{(x-2)+5}{x-2}$

$f(x) = \frac{x-2}{x-2} + \frac{5}{x-2}$

$f(x) = 1 + \frac{5}{x-2}$

$f(x) = \frac{5}{x-2} + 1$

2. Wiedząc, że wykres funkcji $f(x) = \frac{5x}{x-3}$
powstał poprzez równoległe przesunięcie o wektor funkcji $g(x) = \frac{a}{x}$
Wyznacz współczynnik a, współrzędne wektora przesunięcia, współrzędne środka symetrii tej funkcji, równania asymptoty pionowej oraz poziomej.

$f(x) = \frac{5x}{x-3}$ $\quad x-3 \neq 0 \quad x \neq 3$

$g(x) = \frac{a}{x}$ $\quad x \neq 0$

$f(x) = \frac{5(x-3)+15}{x-3}$

$f(x) = \frac{15}{x-3} + \frac{5(x-3)}{x-3}$

$f(x) = \frac{15}{x-3} + 5$

① $a = 15$

② środek symetrii: $S(3,5)$

③ wektor przesunięcia: $\vec{u} = [3,5]$

④ Asymptota pionowa: $x = 3$

⑤ Asymptota pozioma: $y = 5$

3. Wiedząc że funkcja $f(x) = \frac{x-c}{x-d}$
jest rosnąca w przedziałach $x \in (-\infty, 2)$ oraz $x \in (2, \infty)$ oraz że wykres funkcji przecina oś oy w punkcie współrzędnej y = 4 wyznacz $\frac{d}{c}$, wektor przesunięcia, zbiór wartości, środek symetrii i równania asymptot tej funkcji.

$f(x) = \frac{x-c}{x-d}$ $\quad x-d \neq 0 \quad x \neq d$

$f(x) = \frac{(x-d)+d-c}{x-d}$

$f(x) = \frac{d-c}{x-d} + \frac{x-d}{x-d}$

$f(x) = \frac{d-c}{x-d} + 1$

① $2-d=0$
$d=2$

2 jest wyłączone z dziedziny, co oznacza, że mianownik $(x-d)$, będzie dla $x=2$ wynosił 0.

② $f(x) = \frac{2-c}{x-2} + 1$

$\begin{cases} y=4 \\ x=0 \end{cases}$

$4 = \frac{2-c}{0-2} + 1 \quad |-1$

$3 = \frac{2-c}{-2} \quad |\cdot(-2)$

$-6 = 2-c$

$c = 8$

④ $\frac{d}{c} = ?$

$\frac{d}{c} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

⑤ środek symetrii: $S(2,1)$

⑥ Wektor przesunięcia: $\vec{u} = [2,1]$

⑦ $Z_W = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

⑧ Asymptota pionowa: $x = 2$

⑨ Asymptota pozioma: $y = 1$